

MECÂNICA DOS SÓLIDOS E RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

J.F. Silva Gomes

4.^a Edição

AUTOR

J.F. Silva Gomes

TÍTULO

Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais – 4.ª Edição

EDIÇÃO

Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

Tel. 220 939 053 · E-mail: geral@quanticaeditora.pt · www.quanticaeditora.pt

Praça da Corujeira n.º 38 · 4300-144 PORTO

CHANCELA

Engebook – Conteúdos de Engenharia

DISTRIBUIÇÃO

Booki – Conteúdos Especializados

Tel. 220 104 872 · Fax 220 104 871 · E-mail: info@booki.pt · www.booki.pt

IMPRESSÃO

Março, 2025

DEPÓSITO LEGAL

544968/25



A **cópia ilegal** viola os direitos dos autores.

Os prejudicados somos todos nós.

Copyright © 2025 | Todos os direitos reservados a Quântica Editora – Conteúdos Especializados, Lda.

A reprodução desta obra, no todo ou em parte, por fotocópia ou qualquer outro meio, seja eletrónico, mecânico ou outros, sem prévia autorização escrita do Editor e do Autor, e ilícita e passível de procedimento judicial contra o infrator.

Este livro encontra-se em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990, respeitando as suas indicações genéricas e assumindo algumas opções específicas.

CDU

621 Engenharia mecânica em geral

ISBN

Papel: 9789899177741

E-book: 9789899177758

Catálogo da publicação

Família: Engenharia Mecânica

Subfamília: Materiais/Metalúrgica

MECÂNICA DOS SÓLIDOS E RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

J.F. Silva Gomes

4.^a Edição

*À minha mulher,
Maria de Fátima*

ÍNDICE

Prefácio	xv
Lista de Símbolos	xvii
Capítulo I	1
Introdução e Enquadramento	
1.1. Elasticidade, Homogeneidade e Isotropia	7
1.2. Teoria da Elasticidade	2
1.3. Projeto de Máquinas e Estruturas	4
1.4. Estrutura e Conteúdos	6
1.5. Bibliografia	7
Capítulo II	9
Análise do Estado de Tensão	
2.1. O Conceito de Tensão	9
2.2. Componentes Cartesianas da Tensão	12
2.3. Tensão para uma Orientação Arbitrária	14
2.4. Equações de Equilíbrio	17
2.5. Simetria da Matriz das Tensões	19
2.6. Leis de Transformação das Tensões	20
2.7. Invariantes das Tensões	24
2.8. Tensões Principais	25
2.9. Valores Limites da Tensão Normal	29

Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais

2.10.	Valores Limites da Tensão de Corte	31
2.11.	Tensões Principais Secundárias num Plano	33
2.12.	Tensão Hidrostática e Tensões de Desvio	34
2.13.	Tensão de Corte Octaédrica	37
2.14.	Representação Gráfica de Tensões. Construção de Mohr	38
2.15.	Construção de Swift	43
2.16.	Estado Plano de Tensão	44
2.17.	Círculo de Mohr Para o Estado Plano de Tensão	46
2.18.	Tensões em Coordenadas Cilíndricas	49
2.19.	Problemas	53
2.20.	Bibliografia	56
Capítulo III		57
Análise do Estado de Deformação		
3.1.	Introdução. Deslocamento e Deformação	57
3.2.	Extensão ou Deformação Linear	59
3.3.	Distorção ou Deformação de Corte	59
3.4.	Matriz das Deformações	60
3.5.	Deformação Linear Segundo uma Direção Arbitrária	61
3.6.	Deformação de Corte Segundo duas Direções Ortogonais	63
3.7.	Leis de Transformação das Deformações	64
3.8.	Deformações Principais	66
3.9.	Invariantes das Deformações	68
3.10.	Deformações Principais Secundárias	69
3.11.	Deformação Média e Deformação de Desvio	70
3.12.	Deformações Sobre um Plano	71
3.13.	Valores Estacionários das Deformações	75

Índice

3.14.	Deformações Octaédricas	76
3.15.	Equações de Compatibilidade	76
3.16.	Representação Gráfica das Deformações	79
3.17.	Estado Plano de Deformação	81
3.18.	Construções de Mohr para o Estado Plano de Deformação	82
3.19.	Equações das Deformações em Coordenadas Cilíndricas	85
3.20.	Problemas	89
3.21.	Bibliografia	92
Capítulo IV		93
Relações Tensões-Deformações		
4.1.	Introdução	93
4.2.	Lei de Hooke Generalizada	94
4.3.	Lei de Hooke para Materiais Isotrópicos	95
4.4.	Módulo de Rigidez	98
4.5.	Módulo de Compressibilidade	98
4.6.	Módulo de Young e Coeficiente de Poisson	99
4.7.	Relações Entre as Diferentes Constantes Elásticas	100
4.8.	Energia Elástica de Deformação	102
4.9.	Componentes da Energia de Deformação	105
4.10.	Critérios de Resistência	106
4.10.1.	Critério de Rutura para Materiais Frágeis	107
4.10.2.	Critério de Tresca ou da Tensão de Corte Máxima	107
4.10.3.	Critério de von-Mises ou da Tensão Octaédrica Máxima	108
4.11.	Formulação Geral dos Problemas da Elasticidade	109
4.12.	Princípio de Saint-Venant	116

Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais

4.13.	Problemas	117
4.14.	Bibliografia	120

Capítulo V **121**

Torção de Peças Lineares

5.1.	Introdução	121
5.2.	Veio Cilíndrico de Secção Circular	121
5.3.	Veio de Secção Circular Oco	125
5.4.	Veio Prismático de Secção Arbitrária	126
5.4.1.	Teoria de Saint-Venant	126
5.4.2.	Veio de Secção Elíptica	131
5.5.	A Analogia de Membrana	132
5.5.1.	Teoria de Prandtl	132
5.5.2.	Secção Circular	135
5.5.3.	Secção Retangular	137
5.5.4.	Secção Tubular de Parede Fina	140
5.5.5.	Secção Multicelular	142
5.6.	Veio de Secção Circular de Diâmetro Variável	143
5.7.	Problemas	148
5.8.	Bibliografia	150

Capítulo VI **151**

Flexão de Vigas

6.1.	Introdução	151
6.2.	Flexão Pura duma Viga	152
6.3.	Vigas Compostas de Vários Materiais	157
6.4.	Flexão Desviada	159
6.5.	Flexão Combinada com Esforço Normal	161

Índice

6.6.	Flexão Combinada com Torção	162
6.6.1.	Viga de Secção Circular	162
6.6.2.	Viga de Secção Retangular	164
6.7.	Flexão Combinada com Esforço Cortante	165
6.7.1.	O Esforço Rasante	166
6.7.2.	Viga de Secção Reta Retangular	170
6.7.3.	Viga de Secção Reta Circular	171
6.7.4.	Viga de Secção Tubular Aberta	173
6.7.5.	Centro de Corte ou Centro de Torção	177
6.8.	Deformação Devido à Flexão	179
6.8.1.	Método da Integração da Elástica	179
6.8.2.	Método da Viga Conjugada	181
6.9.	Encurvadura. Teoria de Euler	184
6.10.	Flexão de Barras Curvas	188
6.11.	Problemas	191
6.12.	Bibliografia	195

Capítulo VII **197**

Problemas Planos

7.1.	Introdução	197
7.2.	Estado Plano de Deformação	198
7.3.	Estado Plano de Tensão	202
7.4.	Função de Tensão de Airy e Equação Biharmónica	205
7.5.	Soluções Polinomiais da Equação Biharmónica	208
7.5.1.	Função Polinomial do 2º Grau	208
7.5.2.	Função Polinomial do 3º Grau	210
7.5.3.	Função Polinomial do 4º Grau	211
7.6.	Flexão Pura numa Placa	213

Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais

7.7.	Flexão Plana numa Placa Encastada	217
7.8.	Flexão no Plano numa Placa Simplesmente Apoiada	224
7.9.	Soluções Trigonométricas da Equação Biharmónica	227
7.10.	Problemas Planos em Coordenadas Polares	230
7.10.1.	Equações Gerais	230
7.10.2.	Funções de Airy em Coordenadas Polares	233
7.11.	Tensões num Cilindro de Parede Espessa	237
7.12.	Flexão Pura numa Barra Curva	240
7.13.	Flexão numa Barra Curva por Força Radial	243
7.14.	Tensões numa Placa com Furo Circular	245
7.15.	Problemas	250
7.16.	Bibliografia	253

Capítulo VIII **255**

Mecânica do Contacto

8.1.	Introdução	255
8.2.	O Problema de Boussinesq	256
8.3.	Contacto Entre Dois Corpos Esféricos. Teoria de Hertz	262
8.4.	Generalização da Teoria de Hertz a Superfícies não Esféricas	268
8.4.1.	Geometria do Contacto	268
8.4.2.	Distribuição da Pressão sobre a Área de Contacto	270
8.4.3.	Cálculo das Tensões de Contacto	274
8.5.	Contacto entre Dois Cilindros	276
8.6.	Efeito das Forças de Atrito	280
8.7.	Problemas	282
8.8.	Bibliografia	285

Índice

Capítulo IX	287
Mecânica do Impacto	
9.1. Introdução	287
9.2. Propagação de Ondas Longitudinais em Barras	290
9.3. Reflexão e Sobreposição de Ondas	293
9.4. Impacto Coaxial de Barras	295
9.5. Diagrama Espaço-Tempo de Lagrange	298
9.6. Barra com Variação Brusca de Secção	299
9.7. Impacto Coaxial duma Massa Rígida numa Barra	302
9.8. Propagação de Ondas de Torção	306
9.9. Ondas de Volume num Meio Tridimensional	309
9.10. Ondas de Superfície (Ondas de Rayleigh)	312
9.11. Reflexão e Refração de Ondas numa Interface	312
9.11.1. Interface Fluido-Vácuo	313
9.11.2. Interface Sólido-Vácuo	315
9.11.3. Interface Sólido-Sólido. Onda Incidente P	320
9.11.4. Interface Sólido-Sólido. Onda Incidente S	322
9.12. Fraturas Produzidas por Ondas de Tensão	323
9.13. Problemas	328
9.14. Bibliografia	332
Capítulo X	333
Análise Experimental de Tensões	
10.1. Introdução	333
10.2. Extensómetros Mecânicos	335
10.3. Extensómetros de Cordas Vibrantes	337
10.4. Extensometria Elétrica	338
10.4.1. Princípio de Funcionamento	338

Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais

10.4.2.	Extensômetros de Folha Metálica	341
10.4.3.	Fator de Sonda e Sensibilidade Transversal	343
10.4.4.	O Efeito da Temperatura nos Extensômetros	344
10.4.5.	Seleção do Tipo de Extensômetro	348
10.4.6.	Colagem dos Extensômetros	353
10.4.7.	Instrumentação	354
10.4.8.	Circuito da Ponte de Wheatstone	356
10.4.9.	Análise de Rosetas	360
10.5.	Fotoelasticidade	365
10.5.1.	Introdução	365
10.5.2.	Luz Ordinária e Luz Polarizada	366
10.5.3.	Polarizadores Planos	371
10.5.4.	Placas Birrefringentes e Placas Quarto-de-Onda	372
10.5.5.	Birrefringência Acidental	375
10.5.6.	Polariscópios	377
10.5.7.	Tensões no Modelo e no Protótipo	385
10.5.8.	Polariscópio de Reflexão	386
10.5.9.	O Efeito Fotoelástico com Luz Branca	387
10.6.	Revestimentos Frágeis	388
10.7.	Método de Moiré	390
10.8.	Técnicas Holográficas	393
10.8.1.	Introdução	393
10.8.2.	Gravação e Reconstrução dum Holograma	394
10.8.3.	Interferometria Holográfica	397
10.9.	Problemas	403
10.10.	Bibliografia	406
	Índice Remissivo	407

PREFÁCIO

Este livro é o resultado duma compilação de apontamentos e notas de apoio às aulas de *Mecânica dos Sólidos*, *Resistência dos Materiais* e outras disciplinas afins que o autor tem vindo a lecionar ao longo dos últimos quarenta anos, em cursos de licenciatura e de mestrado na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

A obra está estruturada de tal maneira que os conceitos básicos são apresentados duma forma clara e sistemática, tendo havido a preocupação de evitar tratamentos matemáticos mais complexos. Especialmente orientado para a formação de alunos de engenharia, o livro pode servir de apoio a qualquer disciplina de introdução à *Mecânica dos Sólidos* e projeto de elementos estruturais típicos de engenharia mecânica e aeronáutica, engenharia civil e outras especialidades afins.

Embora dando ênfase à utilização dos conceitos e das equações da *Teoria da Elasticidade* clássica para obtenção de soluções por via analítica, foi feito um esforço no sentido de ilustrar a sua aplicação a problemas correntes de engenharia (torção de peças lineares, flexão de vigas, problemas planos, mecânica do contacto, mecânica do impacto e análise experimental de tensões). Por outro lado, o tratamento teórico adotado constitui um suporte essencial ao desenvolvimento de outras técnicas de abordagem dos problemas de projeto e análise estrutural recorrendo, nomeadamente, à utilização dos métodos numéricos.

Sendo raras as publicações técnicas e científicas nesta área em português, pensa-se que esta obra constitui uma contribuição importante para o enriquecimento e melhoria do ensino da engenharia em língua portuguesa. Nesta 3ª edição, também disponível em versão PDF, foi redesenhada a capa do livro, foram corrigidas algumas gralhas e o texto foi totalmente revisto, em conformidade com o novo Acordo Ortográfico de 1990.

Porto, agosto de 2021
J.F. Silva Gomes

Análise do Estado de Tensão

(i) - Num diagrama retangular plano, em que se toma a tensão normal (σ) como abcissa e a tensão de corte (τ) como ordenada, Fig. 2.20, marque-se sobre o eixo das abcissas os pontos P_1 , P_2 e P_3 , de tal modo que:

$$OP_1 = \sigma_1, OP_2 = \sigma_2, OP_3 = \sigma_3$$

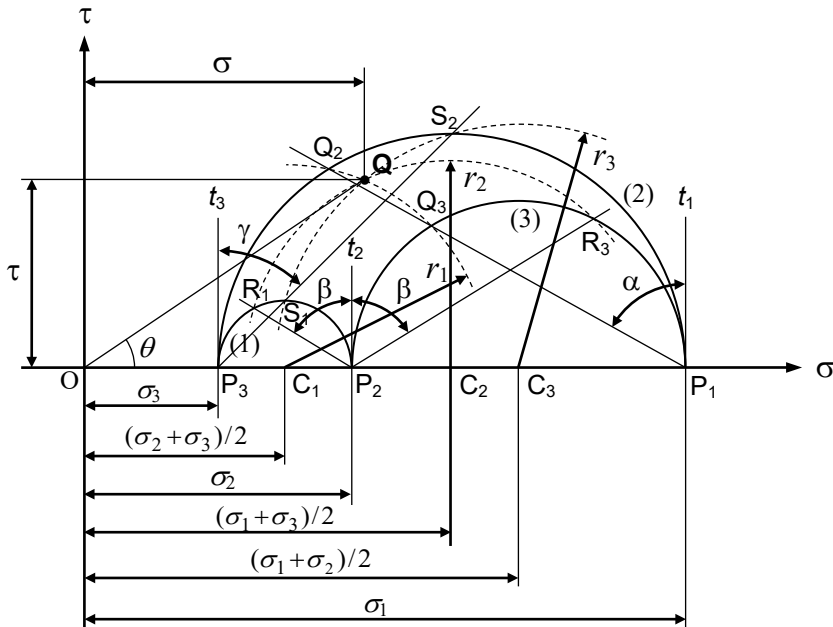


Fig. 2.20 – Diagrama de Mohr para as tensões

(ii) - Tomando os segmentos P_2P_3 , P_1P_3 e P_1P_2 como diâmetros, desenhar os três *círculos de Mohr* (1), (2) e (3) com centros nos pontos médios C_1 , C_2 e C_3 , respetivamente.

(iii) - A partir da vertical t_1 em P_1 marcar o ângulo $\alpha = \arcsin(l)$ que define a recta $P_1Q_3Q_2$, que por sua vez intersecta os *círculos de Mohr* (2) e (3) nos pontos Q_2 e Q_3 cujas coordenadas, de acordo com o esquema representado na Fig. 2.21, são, respetivamente:

Análise do Estado de Tensão

coordenadas x e y . Em qualquer ponto, a direção coordenada Oz é uma direção principal de tensão, à qual corresponde sempre uma tensão principal nula.

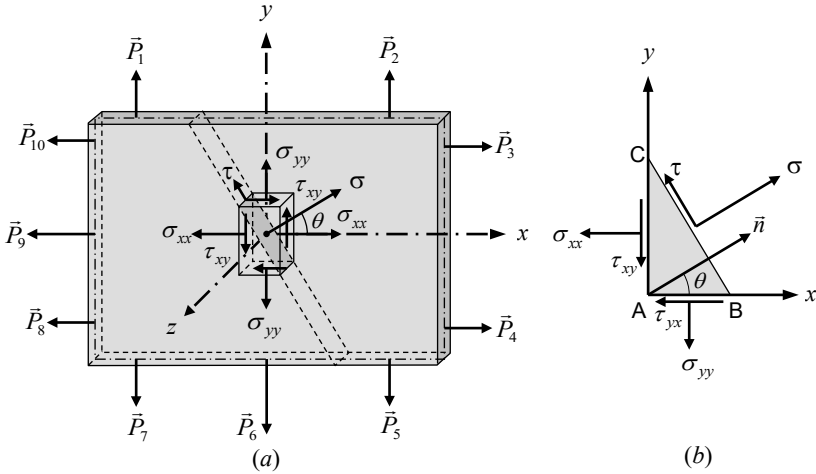


Fig. 2.25 – Solicitação correspondente a um estado plano de tensão

Qualquer plano de corte perpendicular ao plano da placa fica identificado pelo ângulo θ que a respectiva normal faz com a direção do eixo Ox . Considerando o equilíbrio do elemento triangular ABC , Fig. 2.25(b), ou substituindo diretamente os valores dos cossenos diretores para esta situação nas expressões gerais deduzidas no parágrafo §2.3, isto é, tomando:

$$l = \cos(\theta), \quad m = \sin(\theta), \quad n = 0$$

obtém-se:

$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (2.78)$$

A componente tangencial τ , avaliada no sentido do versor $(-\sin\theta, \cos\theta)$, Fig.2.25(b), é dada pela expressão seguinte:

$$\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta) \quad (2.79)$$

A tensão de corte τ anula-se para um ângulo θ_p tal que:

Relações Tensões-Deformações

onde dV é o volume do elemento e $\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x$. A energia acumulada por unidade de volume é a *densidade de energia elástica de deformação*, representada pela letra U_0 , e obtém-se pela expressão:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} E \varepsilon_{xx}^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{xx}^2}{E} \quad (4.31)$$

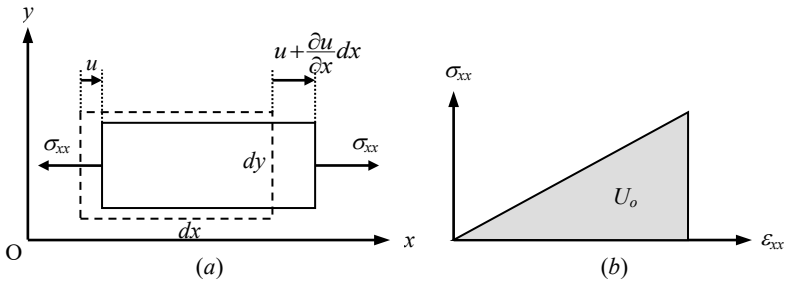


Fig. 4.7 – Tração uniaxial numa peça

Quando sobre o elemento atuam simultaneamente as três componentes normais da tensão σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} , a correspondente densidade de energia elástica de deformação é dada por:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz}) \quad (4.32)$$

Para obter a expressão da energia elástica de deformação associada a uma deformação de corte, considere-se o elemento de volume $(dx \cdot dy \cdot dz)$ submetido a um estado de corte puro, conforme a situação bidimensional representada na Fig.4.8. Admitindo que a tensão de corte τ_{xy} é aplicada gradualmente a partir do valor zero, pode escrever-se:

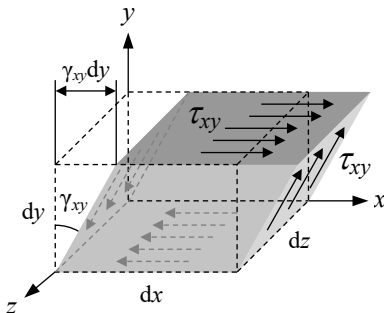


Fig. 4.8 – Corte puro bidimensional

$$dW = dU = \frac{1}{2} (\tau_{xy} dx dz) \gamma_{xy} dy$$

ou seja:

$$dU = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dV \quad (4.33)$$

donde a *densidade de energia elástica*:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2}{G} \quad (4.34)$$

Mecânica do Impacto

onde λ e μ são os parâmetros de Lamé do material e θ é o coeficiente de dilatação volumétrica ($\theta = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$), neste caso correspondente a um estado plano de deformação. Na interface ($x = 0$), aquelas duas componentes da tensão devem ser nulas para todos os valores de y e t . Substituindo e igualando a zero, obtêm-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} 2(A_0 - A_1)\cos(\alpha_0)\sin(\alpha_2) - A_2\cos(2\alpha_2) & = 0 \\ (A_0 + A_1)\cos(2\alpha_2)\sin(\alpha_0) - A_2\sin(\alpha_2)\sin(2\alpha_2) & = 0 \end{cases} \quad (9.77)$$

Resolvendo este sistema de equações em ordem a A_1/A_0 e A_2/A_0 , e tendo em conta as equações (9.74) que relacionam os diversos ângulos de incidência e de reflexão, obtêm-se:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{\sin(2\alpha_0)\sin(2\alpha_2) - k^2\cos^2(2\alpha_2)}{\sin(2\alpha_0)\sin(2\alpha_2) + k^2\cos^2(2\alpha_2)} \quad (9.78)$$

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{2k\sin(2\alpha_0)\cos(2\alpha_2)}{\sin(2\alpha_0)\sin(2\alpha_2) + k^2\cos^2(2\alpha_2)} \quad (9.79)$$

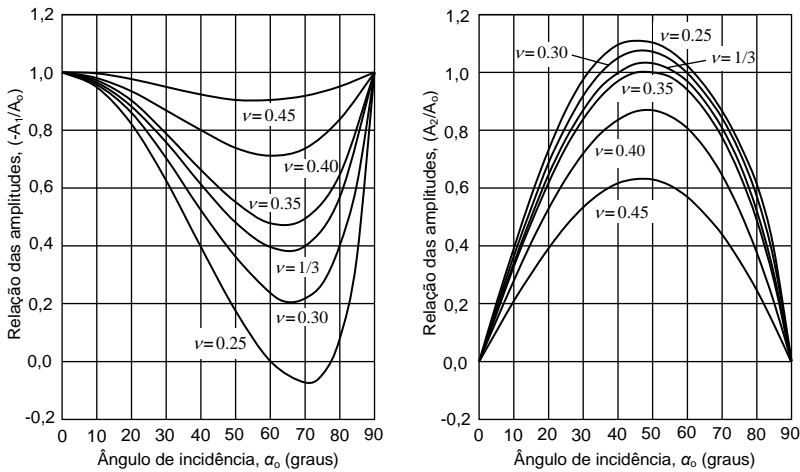


Fig. 9.18 – Amplitudes das ondas reflectidas P e S, resultantes de uma onda incidente do tipo-P.

onde $k^2 = c_1^2 / c_2^2 = (\lambda + 2\mu) / \mu = (2 - 2\nu) / (1 - 2\nu)$. Na Fig.9.18 estão representadas as curvas correspondentes, para diferentes valores do coeficiente de Poisson do material.

onde θ é o coeficiente de dilatação volumétrica, $\varepsilon = dL/L$ é a deformação axial do condutor e ν é o coeficiente de Poisson do material.

Da equação (10.6) pode escrever-se:

$$\frac{dV}{V} = \frac{dL}{L} + \frac{dA}{A} \quad (10.8)$$

Eliminando (dV/V) entre as duas equações anteriores, obtém-se:

$$\frac{dA}{A} = -2\nu \frac{dL}{L} \quad (10.9)$$

E, substituindo em (10.5):

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L}(1+2\nu) \quad (10.10)$$

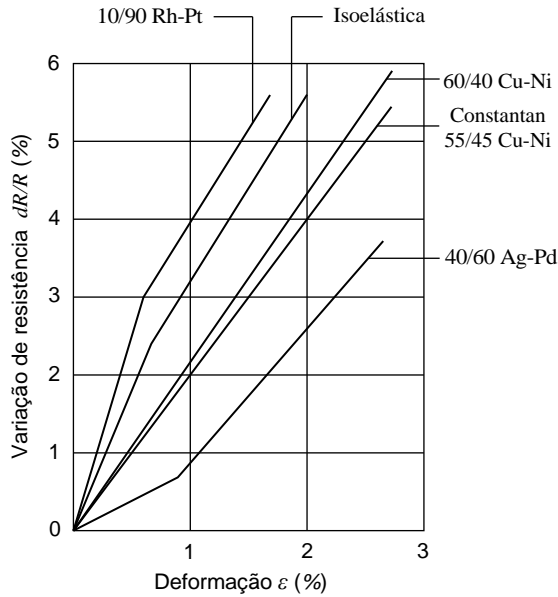


Fig. 10.5 – Variação de dR/R com a deformação, para diferentes materiais

A equação (10.10) pode escrever-se ainda sob a forma:

$$\frac{dR}{R} = k \frac{dL}{L} \quad (10.11)$$

Existem três variantes distintas desta técnica de interferometria holográfica, conforme se descreve a seguir. Cada uma delas tem as suas características próprias, que as tornam mais ou menos adequadas a determinados tipos específicas de utilização.

A. Interferometria Holográfica em Tempo-Real

Teoricamente a maneira mais simples de produzir as duas frentes de onda responsáveis pela formação das franjas de interferência é através da montagem representada na Fig.10.48.

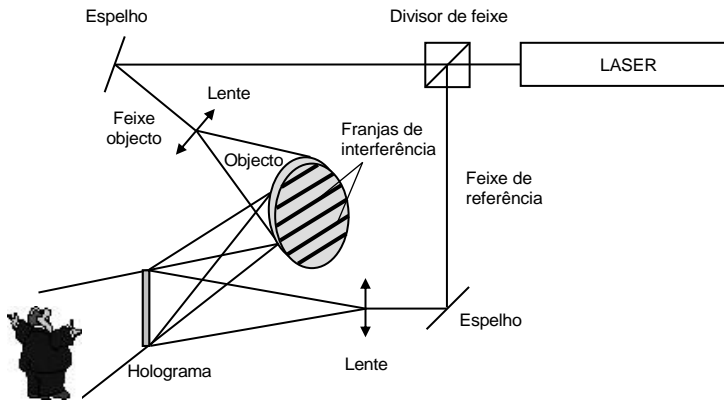


Fig. 10.48 – Formação de franjas de interferência holográfica

Após a gravação do holograma do objeto e da sua revelação, este é reposicionado "exatamente" na posição inicial, mantendo-se o corpo também na mesma posição. Nestas condições, o objeto iluminado e o feixe de referência incidindo sobre a holograma deverão, cada um deles, produzir frentes de onda idênticas que se reforçam mutuamente, provocando um aumento da intensidade do brilho da imagem resultante. Agora, enquanto observando as imagens, se se deslocar ou deformar o objeto, a frente de onda proveniente deste último é alterada, enquanto que a frente de onda reconstruída pelo holograma se mantém inalterada. O resultado é a observação de um conjunto de franjas de interferência, em consequência da adição daquelas duas frentes de onda. Nos pontos em que as duas frentes de onda estão desfasadas de $\lambda/2$, $3\lambda/2$ ou qualquer múltiplo ímpar de $\lambda/2$ produzir-se-á uma interferência destrutiva, com o conseqüente aparecimento de franjas escuras, que são observadas em tempo-real.

MECÂNICA DOS SÓLIDOS E RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

J.F. Silva Gomes

Sobre a obra

A Mecânica dos Sólidos e a Resistência dos Materiais são tópicos obrigatórios em qualquer curso de engenharia mecânica, engenharia civil, engenharia aeronáutica, engenharia naval e outras áreas de engenharia afins, constituindo a base para a análise estrutural e projeto em qualquer uma daquelas especialidades.

Com 432 páginas, o presente livro está organizado em dez capítulos: Introdução e Enquadramento, Análise das Tensões, Análise das Deformações, Lei de Hooke, Torção de Peças Lineares, Flexão de Vigas, Problemas Planos, Mecânica do Contacto, Mecânica do Impacto e Análise Experimental de Tensões.

Embora dando ênfase à utilização dos conceitos e equações da Teoria da Elasticidade clássica para obtenção de soluções por via analítica, foi feito um esforço no sentido de ilustrar a sua aplicação a problemas correntes de engenharia. Por outro lado, o tratamento teórico adotado constitui um suporte essencial ao desenvolvimento de outras técnicas de abordagem dos problemas de análise estrutural e projeto, recorrendo, nomeadamente, à utilização dos métodos numéricos.

Sendo raras as publicações técnicas e científicas nesta área em português, esta obra constitui uma contribuição importante para o enriquecimento do ensino da engenharia em língua portuguesa.

Também disponível em formato e-book



www.quanticaeditora.pt